BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.К.ГАСАНОВ, А.Н.ГАСАНОВА
Бакинский Государственный Университет

При исследовании ряда задач, описывающих процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне возникает задача оптимального управления для одномерной краевой задачи с нелокальными граничными условиям для параболического уравнения. В данной работе исследуется управляемость одной задачи управления, описываемой уравнением параболического типа при отсутствии ограничений. При этом рассматриваются два случая.

I случай: управляющая функция входит в правую часть уравнения;

II случай: управляющая функция входит в начальное условие.

Пусть объект управления в области $D_T = \{(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x,t) \ , \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = u_x(1,t) \ , \tag{3}$$

где $v(x,t)$ - управление.

В дальнейшем в качестве допустимого управления $v(x,t)$ будем рассматривать функции из пространства $L_2(D_T)$, а решение задачи (1)-(3) для заданного управления понимается в обобщенном смысле.

Обобщенным решением задачи (1)-(3) в области D_T называется функция $u(x,t) \in W_2^{(1,0)}(D_T)$, удовлетворяющая первому из граничных условий (3) в обычном смысле и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint_{D_T} \left\{ u\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\eta \right\} dxdt + \int_0^1 \varphi(x)\eta(x,0)\,dx - \int_0^T (u_x(0,t) - u_x(1,t))\,\eta(0,t)\,dt = 0 \tag{4}$$

для любой функции $\eta(x,t)$, обладающей свойствами

$$\eta(x,t) \in W_2^1(D_T), \ \ \eta(x,T) = 0, \ \ \eta(0,t) = \eta(1,t) \ .$$

При заданной начальной функции $\varphi(x)\in L_2(0,1)$ и управлении $v(x,t)\in L_2(D_T)$ для решения задачи (1)-(3) применим метод, который используется в работе $[2]$. Тогда будем иметь:

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{5}$$

где

$$u_1(x,t)=\int_0^1 G(x,s,t)\varphi(s)\,ds,\quad u_2(x,t)=\int_0^t\int_0^1 G(x,s,t-\tau)v(s,\tau)\,ds\,d\tau, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} G(x,s,t-\tau)&=X_0(x)Y_0(s)+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}X_{2k}(x)\left(Y_{2k}(s)-2\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)Y_{2k-1}(s)\right)e^{-\lambda_k(t-\tau)}+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}X_{2k-1}(x)Y_{2k-1}(s)e^{-\lambda_k(t-\tau)}. \end{aligned} \tag{7}$$

В отличие от конечномерного случая, в бесконечномерном случае управляемость определяется следующим образом. Система, состояние которой определяется как решение задачи (1)-(3), называется управляемой, если наблюдение $Cu_v(x,t)=u_v(x,t)$ заметает подпространство $\widetilde{L}(D)$, плотное в пространстве наблюдений, когда управление $v(x,t)$ пробегает все пространство $L_2(D_T)$, где C – единичный оператор (см. $[1]$). Доказывается следующая

Теорема 1. Если система (1)-(3) управляема, то наблюдение $u_v(x,t)$ заметает некоторое подпространство, плотное в пространстве $L_2(D_T)$.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\varphi(x)\equiv 0$. Докажем, что не существует элемента $\psi(x,t)\in L_2(D_T)$, отличного от нулевого, ортогонального всему подпространству $\widetilde{L}(D)$ и заполняющего пространство наблюдений $u_v(x,t)$, т.е. при всех $v(x,t)\in L_2(D_T)$ имеет место:

$$\iint_{D_T}\psi(x,t)u_v(x,t)\,dx\,dt=0, \tag{8}$$

где

$$u_v(x,t)=\int_0^t\int_0^1 G(x,s;t-\tau)u(s,\tau)ds\,d\tau. \tag{9}$$

Подставляя (9) в равенство (8) и поменяя порядок интегрирования, получаем

$$\iint_{D_T}v(x,t)\left(\int_t^T\int_0^1 G(x,s;\tau-t)\psi(s,\tau)dsd\tau\right)dxdt=0. \tag{10}$$

Отсюда, в силу того, что $v(x,t)\in L_2(D_T)$ произвольная функция, имеем:

$$\eta(x,t)=\int_t^T\int_0^1 G(x,s;\tau-t)\,\psi(s,\tau)\,dsd\tau=0. \tag{11}$$

Так как $G(x,s;\tau - t)$ определяется формулой (7), то $\eta(x,t)$ является решением задачи:

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \psi(x,t), \tag{12}$$

$$\eta(x,T) = 0; \;\; \eta_x(1,t) = 0, \;\; \eta(1,t) = \eta(0,t). \tag{13}$$

Отсюда следует, что $\psi(x,t) = 0$ при почти всех $(x,t) \in D_T$.

Таким образом, функция $\psi(x,t)$, ортогональная множеству решений $u_v(x,t)$, равна нулю почти всюду. Это означает, что множество решений $u_v(x,t)$ образует подпространство.

Рассмотрим задачу, в которой состояние системы определяется как решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ в } D_T, \tag{14}$$

$$u(x,o) = v(x); \;\; v(x) \in L_2(0,1), \tag{15}$$

$$u(0,t) = 0; \;\; u_x(0,t) = u_x(1,t). \tag{16}$$

В этой задаче управлением служит начальное состояние $v(x)$. Система (14)-(16) называется управляемой, если финальное наблюдение $Cu_v = u_v(x,T)$ заметает подпространство, плотное в пространстве наблюдений, когда управление $v(x)$ пробегает все пространство $L_2(0,1)$.

При заданном управлении $v(x) \in L_2(0,1)$ решение задачи (14)-(16) можно представить в виде

$$u_v(x,t) = \int_0^1 G(x,s;t)\,v(s)\,ds, \tag{17}$$

где

$$G(x,s;t) = X_0(x)Y_0(s) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)\left(Y_{2k}(s) - 2\sqrt{\lambda_k}\,t\,Y_{2k-1}(s)\right)e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1}(x)Y_{2k-1}(s)e^{-\lambda_k t}. \tag{18}$$

Теорема 2. Система (14)-(16) управляема.

Доказательство. Пусть $\psi(x) \in L_2(0,1)$ ортогональна подпространству, заметаемому наблюдением $u_v(x,t)$, т.е. для любой $v(x) \in L_2(0,1)$ имеем

$$\int_0^1 \psi(x)\,u_v(x,T)\,dx = 0. \tag{19}$$

Подставляя (17) в (19) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^1 \psi(x)\left(\int_0^1 G(x,s;T)\,v(s)ds\right)dx = \int_0^1 v(x)\left(\int_0^1 G(x,s;T)\,\psi(s)ds\right)dx = 0. \tag{20}$$

Функция $\xi(x,t)=\int_0^1 G(x,s;t)\psi(s)ds$ является решением задачи

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0 \text{ в } D_T, \tag{21}$$

$$\xi(x,T)=0;\ \xi_x(1,t)=0,\ \ \xi(0,t)=\xi(1,t)\ . \tag{22}$$

Отсюда получаем, что $\xi(x,t)=0$ п.в. $(x,t)\in D_T$.

Так как

$$\xi(x,0)=\int_0^1 G(x,s;0)\psi(s)ds=\psi(x),$$

то $\psi(x)=0$ п.в. $x\in(0,1)$.

Отсюда следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. ДУ, 1977, т. X(III), №2, с. 294-304.

KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN İDARƏOLUNMASI HAQQINDA

K.Q.HƏSƏNOV, A.N.HƏSƏNOVA

XÜLASƏ

Bir çox məsələlərin həllində, məsələn, diffuziya məsələsində, naqildə istilikkeçirmə zamanı parabolik tip tənliklər üçün klassik olmayan sərhəd şərtli idarəetmə məsələsi yaranır.

İşdə parabolik tip tənliklə təsvir olunan klassik olmayan sərhəd şərtli idarəetmə məsələsinin idarəolunma əlaməti tapılır. Bu zaman 2 hala baxılır:

I halda idarəedici funksiya tənliyin sağ tərəfinə daxil olur;

II halda isə idarəedici funksiya başlanğıc şərtə daxil olur.

ON CONTROLLABILITY OF A PROBLEM OF THE CONTROL FOR THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

K.G.HASANOV, A.N.HASANOVA

SUMMARY

At research of some problems describing process of diffusion of particles in turbulent plasma, during distribution of heat to the thin heated up core there is a problem of optimum control for an one-dimensional boundary problem with non-local boundary conditions of the parabolic equation. In the given work controllability of a problem described by of parabolic type equation is investigated at absence of restrictions. Thus two cases are considered.

1 case: control function is included into the right part of the equation.

2 case: control function is included into the initial condition.